UNIVERSITE DE POITIERS

MATHEMATIQUES

40, Avenue du Recteur Pineau
86022 POITIERS

AGREGATION 1989-1990 1966.

PROBLEME D'ANALYSE

On rappelle les définitions suivantes :

Une algèbre complexe A est un espace vectoriel complexe muni d'un produit $(x, y) \to xy$ tel que

— quels que soient x et y de A et λ complexe, $\lambda(xy) = (\lambda x)y = x(\lambda y)$,

— A est un anneau pour les deux lois internes.

Si l'anneau est commutatif (resp. unitaire), l'algèbre est commutative (resp. unitaire).

Une algèbre de Banach unitaire est un espace de Banach complexe (espace vectoriel normé complet dont la norme est désignée par $\| \ \|$), possédant une structure d'algèbre avec unité u et vérifiant :

$$\|u\| = 1 \qquad \text{et} \qquad \|xy\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$$

pour deux éléments quelconques, x et y, de l'algèbre.

Z désigne l'ensemble des entiers relatifs; C, l'ensemble des nombres complexes.

On appelle F l'ensemble des applications de Z dans C. L'ensemble F est un espace vectoriel dont les éléments f seront appelés les vecteurs; pour $p \in \mathbf{Z}$, $f(p)$ sera appelé indifféremment la composante de rang p du vecteur f, ou bien la valeur de f au point p.

Soit (ω_p) $(p \in \mathbf{Z})$ une famille de nombres complexes; si $\lim\limits_{\substack{p_1 \to -\infty \\ p_2 \to +\infty}} \sum\limits_{p_1}^{p_2} |\omega_p|$ existe, alors $\sum\limits_{p_1}^{p_2} \omega_p$ admet, dans les mêmes conditions, une limite, qui sera désignée par $\sum\limits_p \omega_p$. *Ce symbole ne sera utilisé qu'avec cette signification.*

On appelle E l'ensemble des applications f de F telles que $\sum\limits_p |f(p)|$ existe au sens qui vient d'être défini.

I. — 1° Montrer que, en posant $\|f\| = \sum\limits_p |f(p)|$, on munit l'ensemble E d'une structure d'espace de Banach.

2° On considère les formes linéaires de E (applications linéaires de E dans C). Une telle forme γ est dite bornée s'il existe un réel positif K tel que, pour tout f de E, $|\gamma(f)| \leqslant K\|f\|$. Soit E' l'ensemble des formes linéaires bornées γ. Montrer qu'en posant $\|\gamma\|' = \sup\limits_{\|f\|=1} |\gamma(f)|$ on munit l'ensemble E' d'une structure d'espace de Banach. Montrer que E' est homéomorphe au sous-ensemble B des fonctions bornées de F, B étant muni d'une norme, que l'on précisera.

3° Soit f et g deux éléments de F. Pour tout n de Z *pour lequel le second membre est défini*, on pose $(f * g)(n) = \sum\limits_p f(n-p)g(p)$ et on dit que $f * g$ existe pour n. Montrer qu'alors $g * f$ existe pour n et que $(f * g)(n) = (g * f)(n)$.

4° Si f est dans E et si g appartient à B, montrer que $f * g$ existe pour tout n de Z et appartient à B.

5° Soit f un élément de F. On désigne par f^2 la fonction dont la valeur en chaque point p est $[f(p)]^2$. Si f^2 et g^2 sont dans E, que peut-on dire de $f * g$?

6° Si f et g sont dans E, montrer que $(f * g)(n)$ existe pour tout n de Z et que $f * g$ définit, sur E, un produit associatif vérifiant

$$\|f * g\| \leqslant \|f\| \cdot \|g\|.$$

Montrer que E possède, alors, une structure d'algèbre de Banach commutative et unitaire dont l'unité sera désignée par u.

7° Montrer que l'ensemble E^+ des éléments f de E tels que $\forall n < 0$, $f(n) = 0$, est une sous-algèbre de Banach de E.

II. — 1° Soit h un élément de E. On définit par récurrence :

$$h^{[0]} = u, \qquad h^{[1]} = h, \qquad \ldots, \qquad h^{[k]} = h^{[k-1]} * h \quad (k \text{ entier naturel})$$

et l'on pose $s_l = \sum\limits_{k=1}^{l} h^{[k]}$.

Si $\|h\| < 1$, montrer que s_l a une limite, s, quand l tend vers l'infini. Calculer $h - s + h * s$. Montrer que $u - h$ admet, pour le produit $*$, un inverse $(u-h)^{[-1]}$ et que l'application $h \to (u-h)^{[-1]}$ est continue sur la boule $\|h\| < 1$.

2° Soit f un élément de l'algèbre E admettant un inverse $f^{[-1]}$ et g un élément de E tel que

$$\|g\| < \frac{1}{\mu}, \quad \text{où} \quad \mu = \|f^{[-1]}\|.$$

Montrer que

— $f+g$ admet un inverse;

— $\|(f+g)^{[-1]} - f^{[-1]}\| \leqslant \dfrac{\mu^2\|g\|}{1-\mu\|g\|}$;

— l'ensemble des éléments ayant un inverse est ouvert;

— l'application $f \to f^{[-1]}$ est continue sur cet ensemble.

3° Montrer que la série entière

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k t_k \quad (\lambda \in \mathbf{C},\ t_k \in \mathrm{E})$$

converge si $|\lambda| < \dfrac{1}{\rho}$, où $\rho = \overline{\lim}\sqrt[k]{\|t_k\|}$, et diverge si $|\lambda| > \dfrac{1}{\rho}$.

Montrer que, si $f (f \in \mathrm{E})$ a un inverse et si $\|g\| < \dfrac{1}{\mu_1}$, où $\mu_1 = \overline{\lim}\sqrt[k]{\|(f^{[-1]})^{[k]}\|}$, $f+g$ a aussi un inverse.

Montrer que, si la série entière $\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k h^{[k]}$ $(\lambda \in \mathbf{C},\ h \in \mathrm{E})$ converge, alors $u - \lambda h$ admet un inverse.

III. — Soit T l'ensemble des réels modulo 2π.

Pour $f \in \mathrm{E}$ et $\alpha \in \mathrm{T}$, on pose $\hat{f}_\alpha = \sum_p f(p) e^{-ip\alpha}$.

1° Montrer que, f étant fixé, l'application $\hat{f}: \alpha \to \hat{f}_\alpha$ est continue sur T.

Montrer que l'application $f \to \sup_{\alpha \in \mathrm{T}} |\hat{f}_\alpha|$ est continue sur E.

2° Soit $\hat{\mathrm{E}}$ l'ensemble des applications $\hat{f}$ correspondant aux fonctions f de E. Montrer que l'application définie par $f \to \hat{f}$ est une bijection de E sur $\hat{\mathrm{E}}$. Si l'on munit $\hat{\mathrm{E}}$ de la topologie associée à la norme

$$|||\hat{f}||| = \sup_{\alpha \in \mathrm{T}} |\hat{f}_\alpha|,$$

cette bijection est-elle un homéomorphisme?

3° Montrer que, α étant fixé, l'application $\varphi: f \to \hat{f}_\alpha$ est un homomorphisme d'algèbre de E (structure définie en I, 6°) sur C et que $|\varphi(f)| \leqslant \|f\|$.

Montrer que si f admet, dans l'algèbre E, un inverse, $\hat{f}_\alpha$ ne s'annule pour aucune valeur de α.

4° On désigne par Δ l'ensemble des homomorphismes d'algèbre, non nuls, de E dans C. Montrer que, pour tout δ de Δ, on a $|\delta(f)| \leqslant \|f\|$ et qu'il existe un élément α unique de T tel que $\delta(f) = \hat{f}_\alpha$.

5° Étudier $\|\delta_1 - \delta_2\|'$ (cf. I, 2°) pour deux éléments δ_1 et δ_2 de Δ; quelle est la topologie induite sur Δ? Montrer que la sphère unité Σ de E' n'est pas compacte.

IV. — On considère, pour $p \in \mathbf{Z}$, une famille de fonctions $x(p, \lambda) = x_p(\lambda)$, de la variable complexe λ, définies sur le disque $\mathrm{D}: |\lambda| < \mathrm{R}$ (R réel > 0), telles que $\sum_p |x_p(\lambda)|$ existe pour tout λ appartenant à D. On définit ainsi sur D une fonction de λ, à valeurs dans E, que l'on désigne par $x(\lambda)$.

1° Montrer que, lorsque $x(\lambda)$ est continue sur D, il en est de même de $\|x(\lambda)\| = g(\lambda)$ et que $g(\lambda)$ est majorée sur tout cercle C' :

$$|\lambda| = \mathrm{R}' \quad \text{avec} \quad \mathrm{R}' < \mathrm{R}.$$

2° On dit que $x(\lambda)$ est dérivable au point λ, si $\dfrac{x(\mu) - x(\lambda)}{\mu - \lambda}$ tend vers une limite $y(\lambda)$ appartenant à E, lorsque μ tend vers λ.

Montrer que, si $x(\lambda)$ est dérivable pour tout λ de D :

— elle est continue sur D;

— chacune de ses composantes $x_p(\lambda)$ est holomorphe sur D.

3° Inversement, étant donné une famille de fonctions $x_p(\lambda)$ *holomorphes* sur D, telles que $\sum_p |x_p(\lambda)|$ soit majorée sur tout cercle C', montrer que $\sum_p \left|\dfrac{x_p(\mu) - x_p(\lambda)}{\mu - \lambda}\right|$ est majorée si μ et λ restent respectivement intérieurs à deux disques $|\mu| < \mathrm{R}'$, $|\lambda| < \mathrm{R}''$, avec R' et R'' inférieurs à R.

On pourra utiliser la formule (intégrale) de Cauchy.

4° Dans les mêmes hypothèses pour $x_p(\lambda)$, montrer que, lorsque μ tend vers λ appartenant à D, la somme $\sum_p \left|\dfrac{x_p(\mu) - x_p(\lambda)}{\mu - \lambda} - x'_p(\lambda)\right|$ tend vers 0. Montrer que $\sum_p |x'_p(\lambda)|$ existe et qu'elle est majorée sur tout cercle C'.

5° Montrer que, si $x(\lambda)$ est dérivable sur D, elle est indéfiniment dérivable sur D et qu'elle est développable en série entière de λ dans le disque D.
